96

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ГІРНИЧИЙ УНІВЕРСИТЕТ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ТА ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ ДО РОЗДІЛУ "РЯДИ" дисципліни "Вища математика" для студентів напрямку 0902 Інженерна механіка

Дніпропетровськ

2003

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ГІРНИЧИЙ УНІВЕРСИТЕТ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ТА ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ ДО РОЗДІЛУ "РЯДИ" дисципліни "Вища математика" для студентів напрямку 0902 Інженерна механіка

Затверджено до видання
навчально-методичним управлінням
університету

Дніпропетровськ

НГУ

2003

Методичні вказівки та індивідуальні завдання до розділу “Ряди” дисципліни “Вища математика” для студентів напрямку 0902 Інженерна механіка / Упорядн.: З.І.Бондаренко, С.М.Подольська, С.Є.Тимченко, Д.В.Удовицька.– Дніпропетровськ: Національний гірничий університет, 2003.– 43 с.

Упорядники: З.І.Бондаренко,

С.М.Подольська,

С.Є.Тимченко,

Д.В.Удовицька, асистенти.

Відповідальний за випуск зав. кафедри ВМ Л.В.Новикова, д-р техн. наук, проф.

ВСТУП

Методичні вказівки та індивідуальні завдання до розділу "Ряди" призначені для студентів усіх спеціальностей. Вони включають задачі за такими темами: дослідження збіжності знакосталих і знакозмінних рядів, визначення інтервалу збіжності функціонального ряду, розвинення функцій у ряди Тейлора, Маклорена і Фур'є й обчислення інтегралів із заданою точністю шляхом розкладання в ряд підінтегрального виразу.

Для виконання завдання необхідно знати теоретичні основи теорії рядів і основні методи розв'язання задач. Список рекомендованої літератури додається.

У даній брошурі містяться докладні розв'язання задач одного з варіантів завдання з відповідними вказівками. Вони допоможуть студенту справитися з індивідуальним завданням і одержати певні навички в розв'язанні основних класів задач за даною темою.

Індивідуальні завдання

Варіант 1

1. Дослідити збіжність числових рядів:

а) $\frac{1}{3}+\frac{2}{7}+\frac{3}{11}+\ldots$ б) $\frac{1}{1}+\frac{4}{e}+\frac{9}{e^2}+\ldots$ в) $\frac{1}{5}+\frac{2}{8}+\frac{3}{13}+\ldots$

2. Дослідити ряд на абсолютну й умовну збіжність

$$-\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots$$

3. Знайти інтервал збіжності степеневого ряду (з дослідженням границь)

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}x^{2n-1}}{(4n-3)^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{(n+1)3^n}$.

4. Розвинути в ряд Маклорена функцію

$$f(x)=x\cos\frac{x^2}{4}.$$

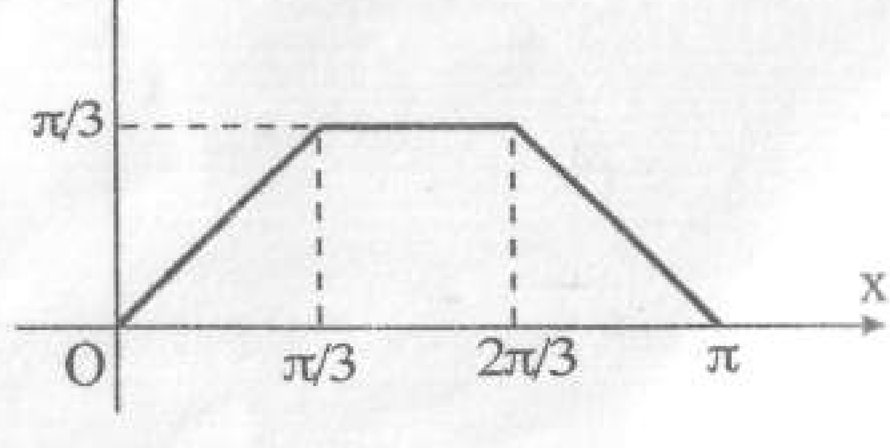
5. Знайти ряд Тейлора в околі точки $x_0=3$ для функції

$$f(x)=\frac{1}{x-2}.$$

6. Обчислити з точністю до 0,01 площу фігури, обмеженої лініями

$$y=x\cos\sqrt{x},\quad x=0,\quad x=\frac{1}{4},\ y=0.$$

7. Розвинути в ряд Фурь'є функцію, графік якої зображений на рисунку, продовжуючи її на [-π;0] парним чи непарним способом.



Варіант 2

1. Дослідити збіжність числових рядів:

а) $1+\frac{3}{4}+\frac{5}{7}+\ldots$ б) $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{8}+\ldots$ в) $\frac{2}{1!}+\frac{4}{3!}+\frac{6}{5!}+\ldots$.

2. Дослідити ряд на абсолютну й умовну збіжність

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{2\cdot 5\cdot 8}-\ldots$$

3. Знайти інтервал збіжності степеневого ряду (з дослідженням границь):

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n-1)x^{2n}}{4^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{(4n-3)2^{n-1}}$

4. Розвинути в ряд Маклорена функцію

$$f(x)=\cos x^2 .$$

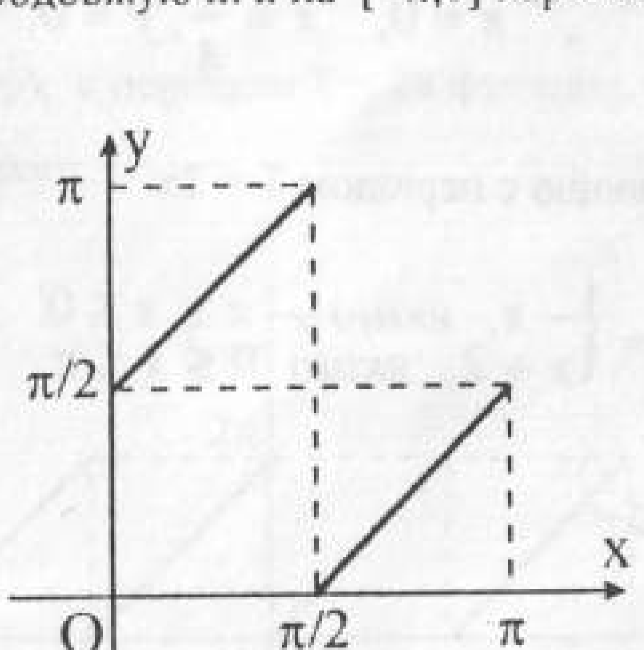
5. Знайти ряд Ґейлора в околі точки $x_0 = 3$ для функції

$$f(x)=\cos\frac{\pi x}{6} .$$

6. Обчислити з точністю до 0,01 площу фігури, обмеженої лініями

$$y=\sqrt{1+x^3}, \quad x=0, \quad x=\frac{1}{2}, \quad y=0.$$

7. Розвинути в ряд Фурь'є функцію, графік якої зображений на рисунку, продовжуючи її на $[-\pi;0]$ парним чи непарним способом.



Варіант 3

1. Дослідити збіжність числових рядів:

а) $\frac{1}{2}+\frac{2}{5}+\frac{3}{8}+\ldots$ б) $\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\ldots$ в) $\frac{1}{1!}+\frac{3}{2!}+\frac{5}{3!}+\ldots$

2. Досліджувати ряд на абсолютну й умовну збіжність

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{2\cdot 4\cdot 6}-\ldots$$

3. Знайти інтервал збіжності степеневого ряду (з дослідженням границь):

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{(2n-1)\sqrt{n}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^{n-1}}{(3n-2)2^{n-1}}$.

4. Розвинути в ряд Маклорена функцію

$$f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

5. Знайти ряд Тейлора в околі точки $x_0=4$ для функції

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}.$$

6. Обчислити з точністю до 0,01 площу фігури, обмеженої лініями

$$y=e^{-x^2},\quad x=0,\quad x=\frac{1}{4}, y=0.$$

7. Розвинути в ряд Фур'є функцію с періодом T = 2π:

$$f(x)=\begin{cases}-x, & якщо\ -\pi\le x\le 0\\ x+2, & якщо\ 0\le x\le\pi\end{cases}$$

Варіант 4

1. Дослідити збіжність числових рядів:

а) $\sqrt{\dfrac{2}{3}}+\sqrt{\dfrac{5}{4}}+\sqrt{\dfrac{8}{5}}+\ldots$ б) $\dfrac{2}{2}+\dfrac{5}{5}+\dfrac{8}{10}+\ldots$ в) $2+\dfrac{2\cdot 5}{4\cdot 2}+\dfrac{2\cdot 5\cdot 8}{7\cdot 2^2}+\ldots$

2. Досліджувати ряд на абсолютну й умовну збіжність

$$1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{6!}+\ldots$$

3. Знайти інтервал збіжності степеневого ряду (з дослідженням границь)

а) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{(2n-1)3^{n-1}}$; б) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(x-3)^n}{2n3^{n-1}}$

4. Розвинути в ряд Маклорена функцію

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{27+x^3}}.$$

5. Знайти ряд Тейлора в околі точки $x_0=4$ для функції

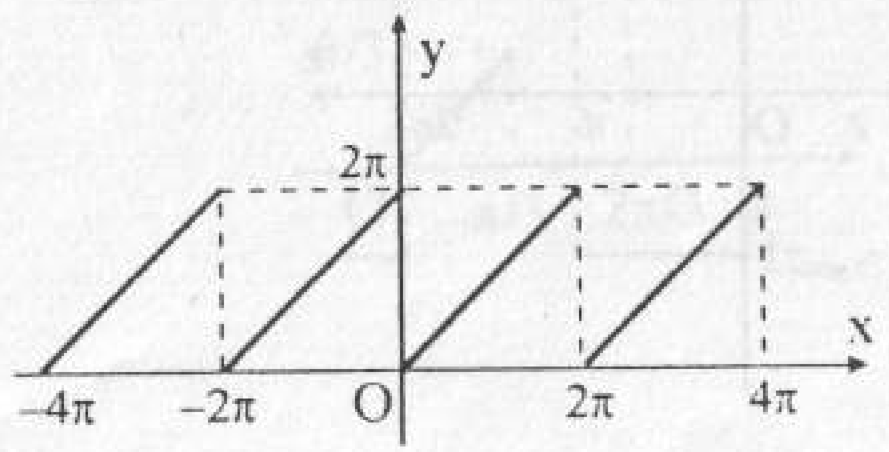
$$f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

6. Обчислити з точністю до 0,01 площу фігури, обмеженої лініями

$$y=\frac{\sin x}{x},\quad x=0{,}1,\quad x=\frac{1}{2},\quad y=0.$$

7. Розвинути в ряд Фур'є с періодом T = 2π функцію, графік якої

зображений на рисунку:



Варіант 5

1. Дослідити збіжність числових рядів:

а) $\sqrt{\frac{2}{5}}+\sqrt{\frac{5}{7}}+\sqrt{\frac{8}{9}}+\ldots$ б) $\frac{1!}{2}+\frac{3!}{2\cdot 5}+\frac{5!}{2\cdot 5\cdot 8}+\ldots$

в) $\frac{1}{2\ln 2}+\frac{2}{3\ln 3}+\frac{3}{4\ln 4}+\ldots$

2. Дослідити на абсолютну й умовну збіжність ряд $\frac{1}{2}-\frac{1}{7}+\frac{1}{12}-\ldots$

3. Знайти інтервал збіжності степеневого ряду (з дослідженням границь)

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^{n+1}x^n}{(2n+1)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{(n+1)3^n}$.

4. Розвинути в ряд Маклорена функцію

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{1+x^2}}.$$

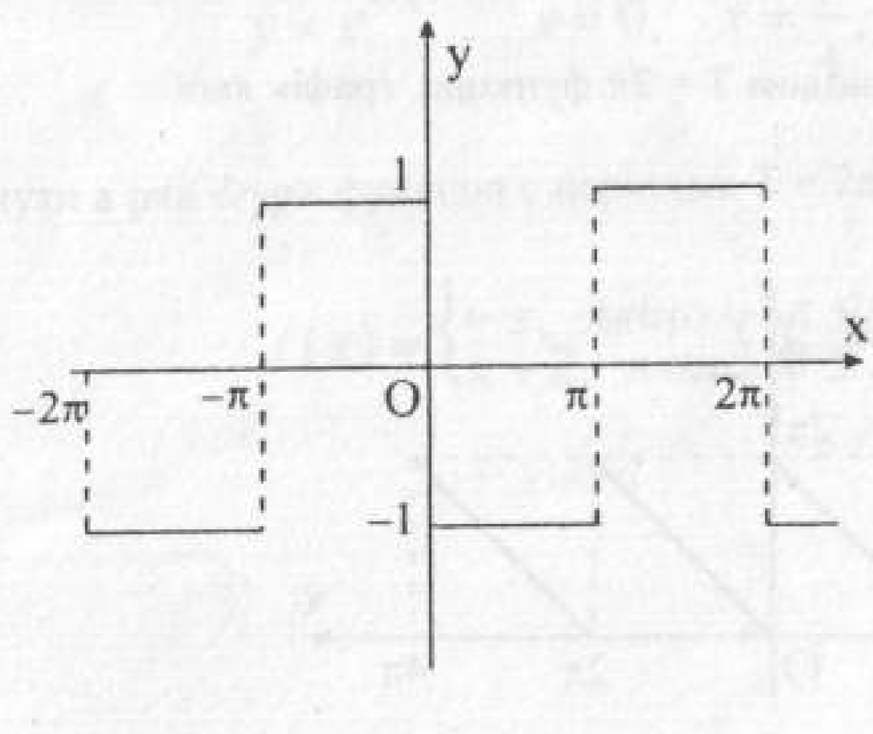
5. Знайти ряд Тейлора в околі точки $x_0=1$ для функції

$$f(x)=\sqrt[3]{x}.$$

6. Обчислити з точністю до 0,01 площу фігури, обмеженої лініями

$$y=\frac{\ln(1+x)}{x},\quad x=0{,}1,\ x=\frac{1}{4},\quad y=0.$$

7. Розвинути в ряд Фур'є функцію, графік якої зображений на рисунку:



Варіант 6

1. Дослідити збіжність числових рядів:

а) $\frac{1}{2\ln^2 2}+\frac{1}{3\ln^2 3}+\frac{1}{4\ln^2 4}+\ldots$ б) $\sqrt{\frac{2}{3}}+\sqrt{\frac{2^2}{5}}+\sqrt{\frac{2^3}{7}}+\ldots$

в) $\frac{1}{3}+\frac{1\cdot 3}{3\cdot 7}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{3\cdot 7\cdot 11}+\ldots$

2. Дослідити на абсолютну й умовну збіжність ряд

$$\frac{1}{1!}-\frac{1}{2\cdot 3!}+\frac{1}{2^2\cdot 5!}-\ldots$$

3. Знайти інтервал збіжності степеневого ряду (з дослідженням границь):

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(3n-1)x^{2n-1}}{3^{2n}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-4)^n}{(2n-1)2^{n-1}}$.

4. Розвинути в ряд Маклорена функцію

$$f(x)=\sqrt[3]{(1-x^2)^2}$$

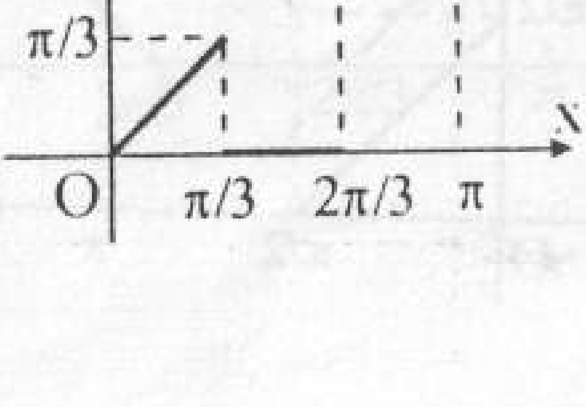
5. Знайти ряд Тейлора в околі точки $x_0 = 4$ для функції

$$f(x)=\sin\frac{\pi x}{8}.$$

6. Обчислити з точністю до 0,01 площу фігури, обмеженої лініями

$$y=\frac{1}{1+x^4},\quad x=0,\quad x=1,\quad y=0.$$

7. Розвинути в ряд Фур'є функцію, графік якої зображений на рисунку, продовжуючи її на $[-\pi;0]$ парним чи непарним способом.



Варіант 7

1. Дослідити збіжність числових рядів:

а) $2+\frac{4}{2}+\frac{8}{3}+\dots$ б) $\frac{1}{2\cdot 1}+\frac{1}{3\cdot 2}+\frac{1}{4\cdot 3}+\dots$

в) $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{3}{2}+\frac{5}{(\sqrt{2})^3}+\dots$

2. Дослідити на абсолютну й умовну збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$$

3. Знайти інтервал збіжності степеневого ряду (з дослідженням границь):

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{3n}}{n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{2^n}$.

4. Розвинути в ряд Маклорена функцію

$$f(x)=x\ln(1+x^2).$$

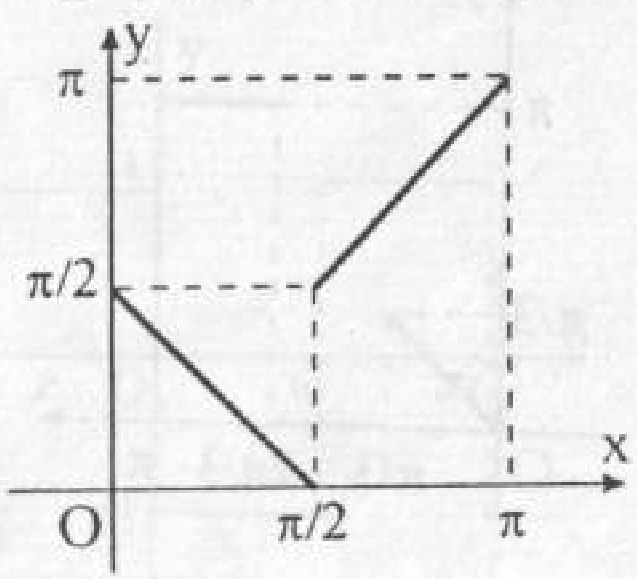
5. Знайти ряд Тейлора в околі точки x_0 = -2 для функції

$$f(x)=e^x.$$

6. Обчислити з точністю до 0,01 площу фігури, обмеженої лініями

$$y=\frac{\sin x}{x},\quad x=0{,}1,\quad x=\frac{1}{2},\quad y=0.$$

7. Розвинути в ряд Фурь'є функцію, графік якої зображений на рисунку, продовжуючи її на [-π;0] парним чи непарним способом.



Варіант 8

1. Дослідити збіжність числових рядів:

а) $\frac{3}{3}+\frac{9}{5}+\frac{27}{7}+\ldots$ б) $1\cdot\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{25}+\frac{1}{3}\cdot\frac{27}{125}+\ldots$ в) $\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\ldots$

2. Дослідити на абсолютну й умовну збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

3. Знайти інтервал збіжності степеневого ряду (з дослідженням границь):

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^{n-1}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n}$.

4. Розвинути в ряд Маклорена функцію

$$f(x)=\sqrt[4]{1-x}.$$

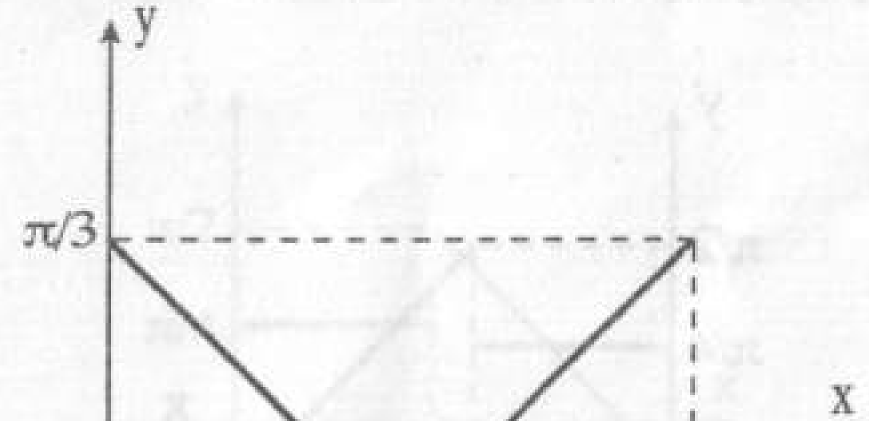
5. Знайти ряд Тейлора в околі точки $x_0=4$ для функції

$$f(x)=\sqrt{x}.$$

6. Обчислити з точністю до 0,01 площу фігури, обмеженої лініями

$$y=\sin x^2,\quad x=0,\quad x=\frac{1}{2},\ y=0.$$

7. Розвинути в ряд Фур'є функцію, графік якої зображений на рисунку, продовжуючи її на [-π;0] парним чи непарним способом.



Варіант 9

1. Дослідити збіжність числових рядів:

а) $\frac{2}{2}+\frac{3}{5}+\frac{4}{8}+\ldots$ б) $\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}\ldots$ в) $\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{7!}+\ldots$

2. Дослідити на абсолютну й умовну збіжність ряд

$$\frac{1}{2}-\frac{\sqrt[3]{2}}{5}+\frac{\sqrt[3]{3}}{10}-\ldots$$

3. Знайти інтервал збіжності степеневого ряду (з дослідженням границь):

а) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{3^{n-1}x^{n-1}}{(n-1)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(x-3)^n}{n!3^n}$.

4. Розвинути в ряд Маклорена функцію

$$f(x)=\frac{1}{1-x^2}.$$

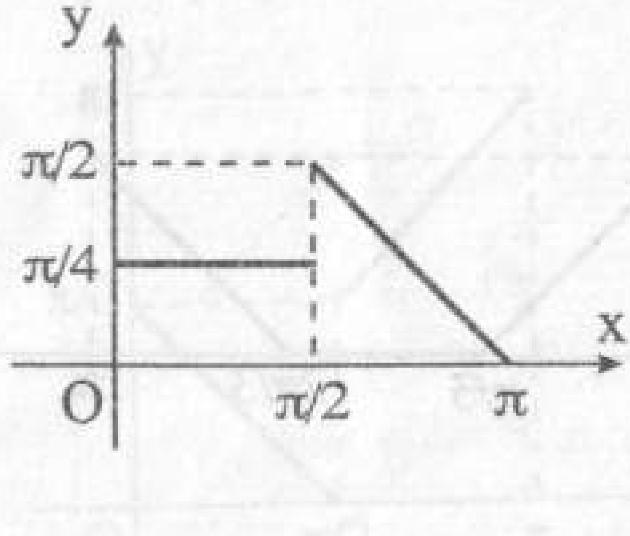
5. Знайти ряд Тейлора в околі точки $x_0 = -1$ для функції

$$f(x)=\frac{1}{x^2}.$$

6. Обчислити з точністю до 0,01 площу фігури, обмеженої лініями

$$y=\cos x^3,\quad x=0,\quad x=1,\ y=0.$$

7. Розвинути в ряд Фурь'є функцію, графік якої зображений на рисунку, продовжуючи її на [-π;0] парним чи непарним способом.



Варіант 10

1. Дослідити збіжність числових рядів:

а) $\frac{1}{e}+\frac{8}{e^2}+\frac{27}{e^3}+\ldots$ б) $\frac{1}{1}+\frac{1}{\sqrt[3]{9}}+\frac{1}{\sqrt[3]{25}}+\frac{1}{\sqrt[3]{49}}\ldots$ в) $\frac{3}{4}+\frac{5}{7}+\frac{7}{10}+\ldots$

2. Дослідити на абсолютну й умовну збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{6n-5}.$$

3. Знайти інтервал збіжності степеневого ряду (з дослідженням границь):

а) $\sum_{n=1}^{\infty}3^{n-1}x^{n-1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n5^n}$.

4. Розвинути в ряд Маклорена функцію

$$f(x)=xe^{-3x}.$$

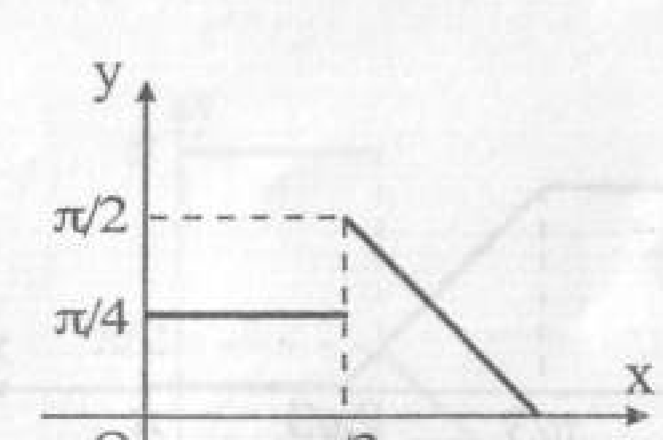
5. Знайти ряд Тейлора в околі точки $x_0=1$ для функції

$$f(x)=\frac{1}{x}.$$

6. Обчислити з точністю до 0,01 площу фігури, обмеженої лініями

$$y=\ln(1+\sqrt{x}),\quad x=0,\quad x=\frac{1}{2},\ y=0.$$

7. Розвинути в ряд Фур'є функцію, графік якої зображений на рисунку, продовжуючи її на [-π;0] парним чи непарним способом.



Варіант 11

1. Дослідити збіжність числових рядів:

а) $\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\ldots$ б) $\frac{2}{7}+\frac{4}{9}+\frac{6}{11}+\ldots$ в) $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 6}+\ldots$

2. Дослідити на абсолютну й умовну збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2n+1)}{n(n+1)}.$$

3. Знайти інтервал збіжності степеневого ряду (з дослідженням границь):

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^3 x^{2n}}{3n+1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n9^n}$.

4. Розвинути в ряд Маклорена функцію

$$f(x)=\ln(1+3x).$$

5. Знайти ряд Тейлора в околі точки $x_0=1$ для функції

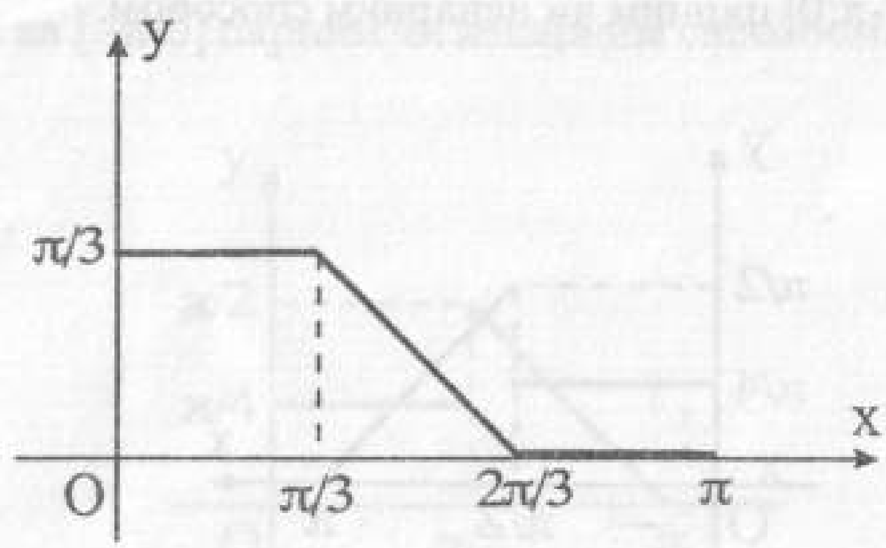
$$f(x)=e^{3x}.$$

6. Обчислити з точністю до 0,01 площу фігури, обмеженої лініями

$$y=e^{-x^2},\quad x=0,\quad x=1,\ y=0.$$

7. Розвинути в ряд Фур'є функцію, графік якої зображений на рисунку,

продовжуючи її на [-π;0] парним чи непарним способом.



Варіант 12

1. Дослідити збіжність числових рядів:

а) $\frac{1}{2\cdot 1}+\frac{1}{3\sqrt{2}}+\frac{1}{4\sqrt{3}}+\ldots$ б) $\frac{3}{3}+\frac{4}{9}+\frac{5}{27}+\ldots$ в) $\frac{1}{3\cdot 1}+\frac{4}{4\cdot 2}+\frac{9}{5\cdot 3}+\ldots$

2. Дослідити на абсолютну й умовну збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{3^n}.$$

3. Знайти інтервал збіжності степеневого ряду (з дослідженням границь):

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n2^n}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{3^n}.$$

4. Розвинути в ряд Маклорена функцію

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

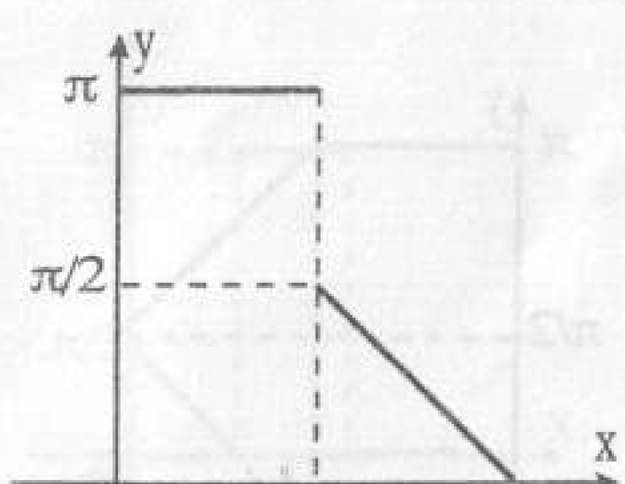
5. Знайти ряд Тейлора в околі точки $x_0 = -2$ для функції

$$f(x)=\frac{1}{x-4}.$$

6. Обчислити з точністю до 0,01 площу фігури, обмеженої лініями

$$y=\cos x^2, \quad x=0, \quad x=1, \quad y=0.$$

7. Розвинути в ряд Фур'є функцію, графік якої зображений на рисунку, продовжуючи її на [-π;0] парним чи непарним способом.



Варіант 13

1. Дослідити збіжність числових рядів:

а) $\frac{1}{2}+\frac{4}{5}+\frac{7}{10}+...$ б) $\frac{1}{3}+\frac{1\cdot2}{5}+\frac{1\cdot2\cdot3}{9}+\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot}{17}...$

в) $\frac{1}{2\ln^2 2}+\frac{1}{3\ln^2 3}+\frac{1}{4\ln^2 4}+...$

2. Дослідити на абсолютну й умовну збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\sqrt[3]{n}}.$$

3. Знайти інтервал збіжності степеневого ряду (з дослідженням границь):

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n+1}; \qquad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{(2n-1)2^n}.$$

4. Розвинути в ряд Маклорена функцію

$$f(x)=x\cos 2x.$$

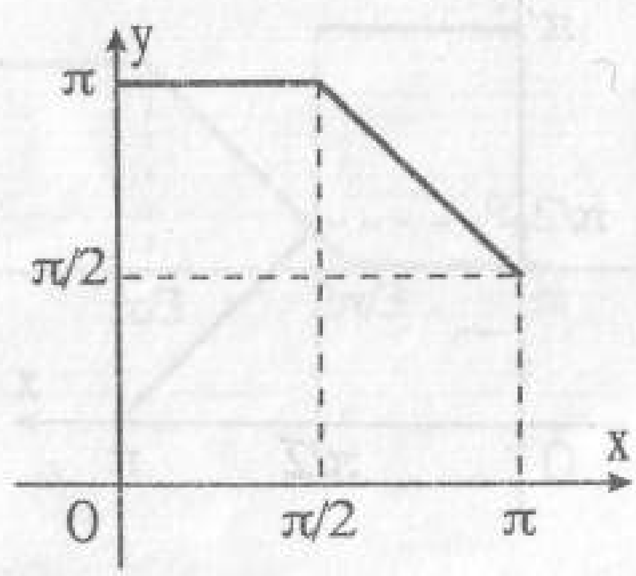
5. Знайти ряд Тейлора в околі точки $x_0=1$ для функції

$$f(x)=\frac{1}{x+2}.$$

6. Обчислити з точністю до 0,01 площу фігури, обмеженої лініями

$$y=\sqrt{1+x^3}, \quad x=0, \quad x=\frac{1}{4}, \; y=0.$$

7. Розвинути в ряд Фур'є функцію, графік якої зображений на рисунку, продовжуючи її на [-π;0] парним чи непарним способом.



Варіант 14

1. Дослідити збіжність числових рядів:

а) $\frac{1}{1}+\frac{3}{1\cdot2}+\frac{5}{1\cdot2\cdot3}+\ldots$ б) $\frac{3}{3}+\frac{9}{4}+\frac{27}{5}+\ldots$ в) $\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{2\cdot4}+\frac{1}{3\cdot5}+\ldots$

2. Дослідити на абсолютну й умовну збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\sqrt[3]{n}}{n^2+1}.$$

3. Знайти інтервал збіжності степеневого ряду (з дослідженням границь):

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}2^n}{n!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^n}{2n4^n}$.

4. Розвинути в ряд Маклорена функцію

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{1-x^3}}.$$

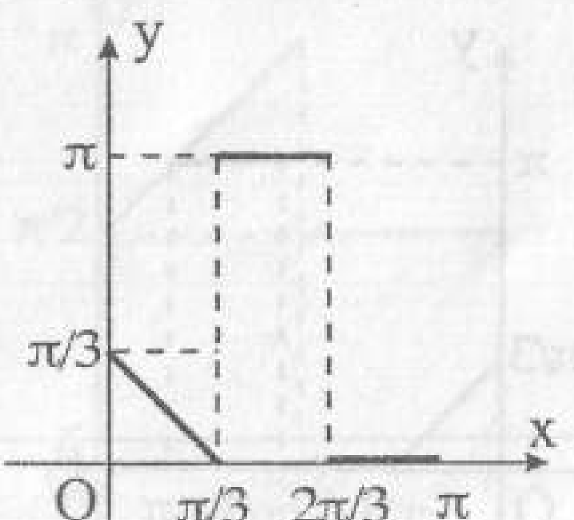
5. Знайти ряд Тейлора в околі точки $x_0=2$ для функції

$$f(x)=\frac{1}{x^3}.$$

6. Обчислити з точністю до $0{,}01$ площу фігури, обмеженої лініями

$$y=e^{2x},\quad x=0,\quad x=\frac{1}{3},\ y=0.$$

7. Розвинути в ряд Фур'є функцію, графік якої зображений на рисунку, продовжуючи її на $[-\pi;0]$ парним чи непарним способом.



Варіант 15

1. Дослідити збіжність числових рядів:

а) $\frac{2}{2}+\frac{3}{5}+\frac{4}{8}+\ldots$ б) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 4}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 4\cdot 6}+\ldots$ в) $\frac{1}{1}+\frac{1}{\sqrt[5]{2}}+\frac{1}{\sqrt[5]{3}}+\ldots$

2. Дослідити на абсолютну й умовну збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+2)}{3n+4}.$$

3. Знайти інтервал збіжності степеневого ряду (з дослідженням границь):

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n^3} \qquad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty}n^3(x-3)^n .$$

4. Розвинути в ряд Маклорена функцію

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}.$$

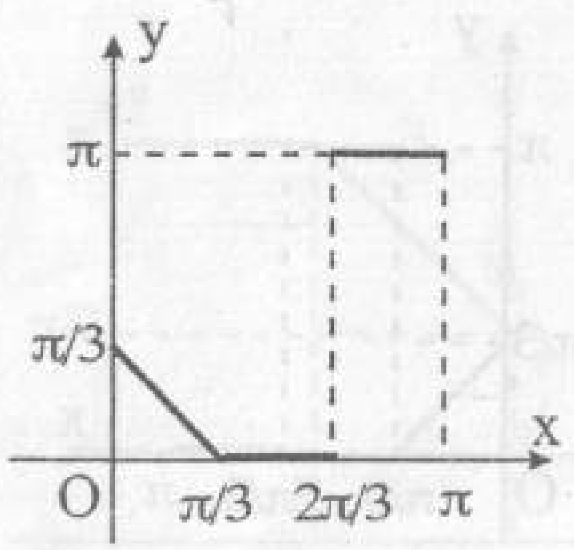
5. Знайти ряд Тейлора в околі точки $x_0=3$ для функції

$$f(x)=\sqrt[3]{x-2}.$$

6. Обчислити з точністю до 0,01 площу фігури, обмеженої лініями

$$y=arctgx^2,\quad x=0,\quad x=\frac{1}{2},\ y=0$$

7. Розвинути в ряд Фур'є функцію, графік якої зображений на рисунку, продовжуючи її на [-π;0] парним чи непарним способом.



Варіант 16

1. Дослідити збіжність числових рядів:

а) $1+\frac{2}{4}+\frac{3}{7}+\ldots$ б) $\frac{1}{2}+\frac{4}{4}+\frac{9}{8}+\ldots$ в) $\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\ldots$

2. Дослідити на абсолютну й умовну збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{2n+3}.$$

3. Знайти інтервал збіжності степеневого ряду (з дослідженням границь):

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^{2n}}{n^2}$.

4. Розвинути в ряд Маклорена функцію

$$f(x)=\sqrt[3]{1-x^3}.$$

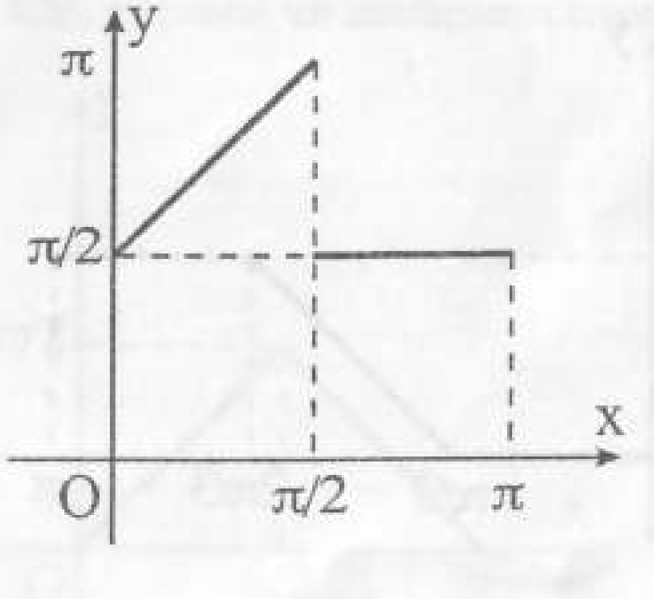
5. Знайти ряд Тейлора в околі точки $x_0=9$ для функції

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}.$$

6. Обчислити з точністю до 0,01 площу фігури, обмеженої лініями

$$y=\cos\sqrt{x},\ x=0,\ x=\frac{1}{2},\ y=0.$$

7. Розвинути в ряд Фур'є функцію, графік якої зображений на рисунку, продовжуючи її на [-π;0] парним чи непарним способом.



Варіант 17

1. Дослідити збіжність числових рядів:

а) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{2}{2\cdot 3}+\frac{3}{2\cdot 3\cdot 4}+\ldots$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{n}}{n!}$ в) $\sqrt{\frac{2}{1}}+\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{4}{3}}+\ldots$

2. Дослідити на абсолютну й умовну збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)\ln(n+1)}.$$

3. Знайти інтервал збіжності степеневого ряду (з дослідженням границь):

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^{2n}}{3^{n}}$.

4. Розвинути в ряд Маклорена функцію

$$f(x)=\sin^{2}x.$$

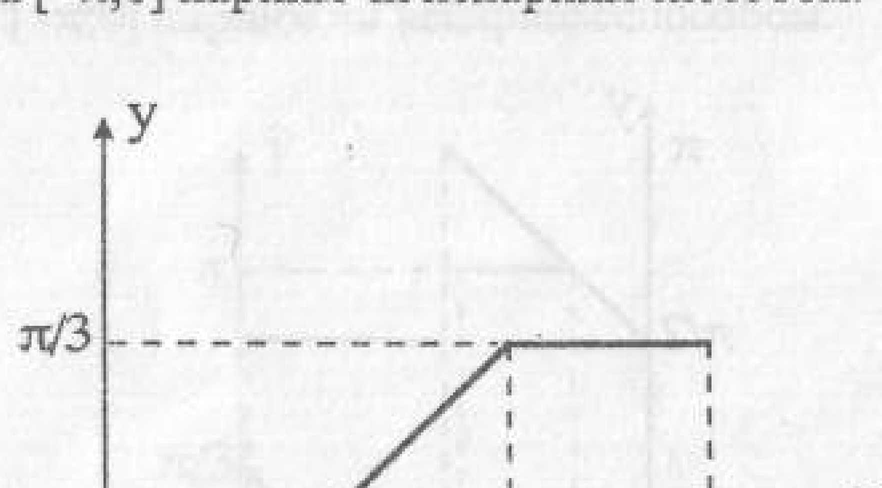
5. Знайти ряд Тейлора в околі точки $x_0=2$ для функції

$$f(x)=\frac{1}{x-5}.$$

6. Обчислити з точністю до 0,01 площу фігури, обмеженої лініями

$$y=\ln(1+x^{3}),\quad x=0,\quad x=\frac{1}{2},\ y=0.$$

7. Розвинути в ряд Фур'є функцію, графік якої зображений на рисунку, продовжуючи її на [-π;0] парним чи непарним способом.



Варіант 18

1. Дослідити збіжність числових рядів:

а) $\frac{1}{3}+\frac{2}{5}+\frac{3}{7}+\ldots+\frac{n}{2n+1}+\ldots$ б) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots$

в) $1+\frac{2}{\sqrt{2}}+\frac{2^2}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{2^{n-1}}{\sqrt{n}}+\ldots$

2. Дослідити ряд на абсолютну й умовну збіжність

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$$

3. Знайти інтервал збіжності степеневого ряду (з дослідженням границь):

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n^2}; \qquad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{n\cdot 4^n}.$$

4. Розвинути в ряд Маклорена функцію

$$f(x)=x\cdot\sin\frac{x^2}{4}.$$

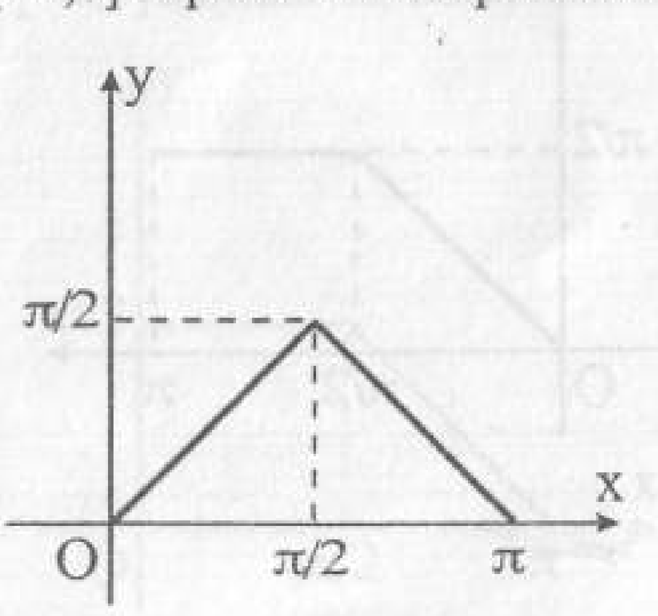
5. Знайти ряд Тейлора в околі точки $x_0=1$ для функції

$$f(x)=\sqrt{x}.$$

6. Обчислити з точністю до 0,01 площу фігури, обмеженої лініями

$$y=\ln(x^2+1), \quad x=\frac{1}{2}, \quad x=1, \; y=0.$$

7. Розвинути в ряд Фурь'є функцію, графік якої зображений на рисунку, продовжуючи її на $[-\pi;0]$ парним чи непарним способом.



Варіант 19

1. Дослідити збіжність числових рядів:

а) $1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}+\ldots$

б) $\frac{2}{1}+\frac{2^2}{2}+\frac{2^3}{3}+\ldots+\frac{2^n}{n}+\ldots$ в) $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots$

2. Дослідити ряд на абсолютну й умовну збіжність

$$1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\ldots$$

3. Знайти інтервал збіжності степеневого ряду (з дослідженням границь):

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{2n}}{n^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n\cdot x^n}{(10n-3)^2}$.

4. Розвинути в ряд Маклорена функцію

$$f(x)=\sin x^3.$$

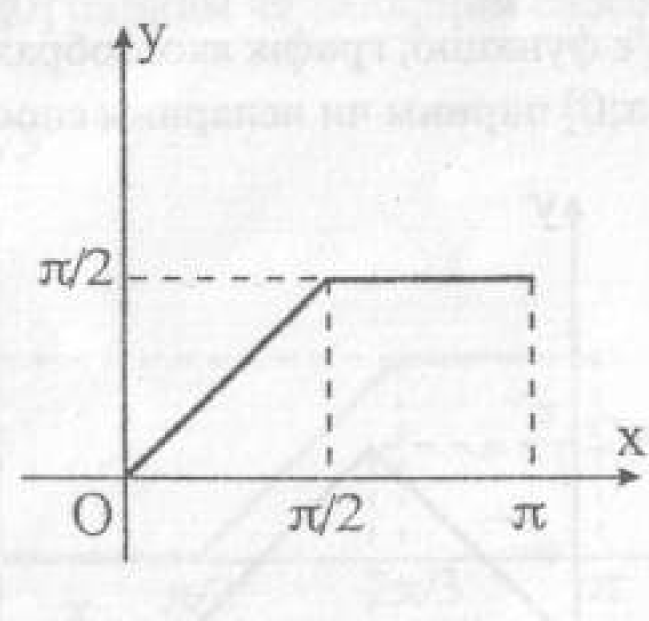
5. Знайти ряд Тейлора в околі точки $x_0=1$ для функції

$$f(x)=2^x-1.$$

6. Обчислити з точністю до 0,01 площу фігури, обмеженої лініями

$$y=\ln\left(\frac{1}{1-x}\right)^{-1},\quad x=\frac{1}{12},\quad x=\frac{1}{2},\quad y=0$$

8. Розвинути в ряд Фур'є функцію, графік якої зображений на рисунку, продовжуючи її на $[-\pi;0]$ парним чи непарним способом.



Варіант 20

1. Дослідити збіжність числових рядів:

а) $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\ldots+\frac{n}{n+1}+\ldots$

б) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots$

в) $\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{7}\right)^3+\ldots+\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n+\ldots$

2. Дослідити ряд на абсолютну й умовну збіжність

$$\frac{\sin\alpha}{1^2}+\frac{\sin 2\alpha}{2^2}+\frac{\sin 3\alpha}{3^2}+\ldots+\frac{\sin n\alpha}{n^2}+\ldots$$

3. Знайти інтервал збіжності степеневого ряду (з дослідженням границь):

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 3^n\cdot x^n$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2x)^n}{n}$.

4. Розвинути в ряд Маклорена функцію

$$f(x)=e^{-x^2}.$$

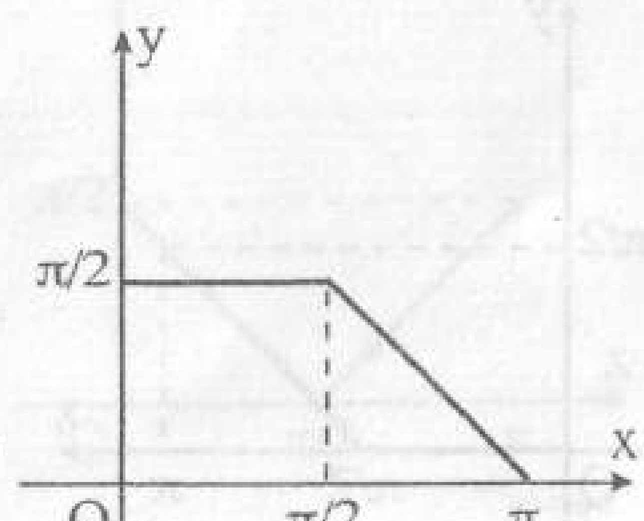
5. Знайти ряд Тейлора в околі точки $x_0=4$ для функції

$$f(x)=\frac{1}{x-5}.$$

6. Обчислити з точністю до 0,01 площу фігури, обмеженої лініями

$$y=x\sin\sqrt{x},\quad x=0,\quad x=\frac{1}{4},\ y=0$$

7. Розвинути в ряд Фур'є функцію, графік якої зображений на рисунку, продовжуючи її на $[-\pi;0]$ парним чи непарним способом.



Варіант 21

1. Дослідити збіжність числових рядів:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$; б) $\frac{|\sin\alpha|}{1^2}+\frac{|\sin2\alpha|}{2^2}+\frac{|\sin3\alpha|}{3^2}+\ldots+\frac{|\sin n\alpha|}{n^2}+\ldots$;

в) $\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\ldots+\frac{1}{3^n}+\ldots$

2. Дослідити ряд на абсолютну й умовну збіжність

$$\frac{\cos\frac{\pi}{4}}{3}+\frac{\cos\frac{3\pi}{4}}{3^2}+\frac{\cos\frac{5\pi}{4}}{3^3}+\ldots+\frac{\cos\frac{(2n-1)\pi}{4}}{3^n}+\ldots$$

3. Знайти інтервал збіжності степеневого ряду (з дослідженням границь):

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\frac{(x-1)^n}{(3n-1)^2}$.

4. Розвинути в ряд Маклорена функцію

$$f(x)=\cos^2 x.$$

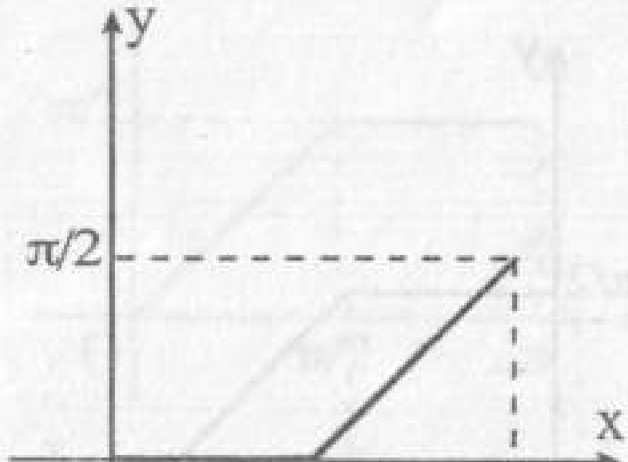
5. Знайти ряд Тейлора в околі точки $x_0=3$ для функції

$$f(x)=\sin\frac{\pi\cdot x}{6}.$$

6. Обчислити з точністю до 0,01 площу фігури, обмеженої лініями

$$y=\frac{\ln(1+x)}{x},\quad x=\frac{1}{4},\quad x=\frac{1}{2},\ y=0.$$

6. Розвинути в ряд Фурь'є функцію, графік якої зображений на рисунку, продовжуючи її на $[-\pi;0]$ парним чи непарним способом.



Варіант 22

1. Дослідити збіжність числових рядів:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-n}$; б) $\frac{|\cos\alpha|}{1^2}+\frac{|\cos 2\alpha|}{2^2}+\frac{|\cos 3\alpha|}{3^2}+\ldots+\frac{|\cos n\alpha|}{n^2}+\ldots$;

в) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$.

2. Дослідити ряд на абсолютну й умовну збіжність

$$\frac{\cos\alpha}{1}+\frac{\cos 2\alpha}{2^2}+\frac{\cos 3\alpha}{3^2}+\ldots+\frac{\cos n\alpha}{n^2}+\ldots$$

3. Знайти інтервал збіжності степеневого ряду (з дослідженням границь):

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+3}{e^n}(x-2)^n$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{3^{n-1}}$

4. Розвинути в ряд Маклорена функцію

$$f(x)=\frac{x}{(e^x-1)^{-1}}.$$

5. Знайти ряд Тейлора в околі точки $x_0=9$ для функції

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{13-x}}.$$

6. Обчислити з точністю до 0,01 площу фігури, обмеженої лініями

$$y=\sqrt{1+x^4},\quad x=0,\quad x=\frac{1}{4},\ y=0.$$

7. Розвинути в ряд Фурьʼє функцію, графік якої зображений на рисунку, продовжуючи її на $[-\pi;0]$ парним чи непарним способом.

Варіант 23

1. Дослідити збіжність числових рядів:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^4 n\alpha}{n^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}$; в) $\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+...+\frac{1}{4^n}+...$

2. Дослідити ряд на абсолютну й умовну збіжність

$$\frac{2}{1}-\frac{2^2}{2}+\frac{2^3}{3}-...$$

3. Знайти інтервал збіжності степеневого ряду (з дослідженням границь):

а) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-1}(x-3)^n$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{4n+1}$.

4. Розвинути в ряд Маклорена функцію

$$f(x)=\sin^2\frac{x}{5}.$$

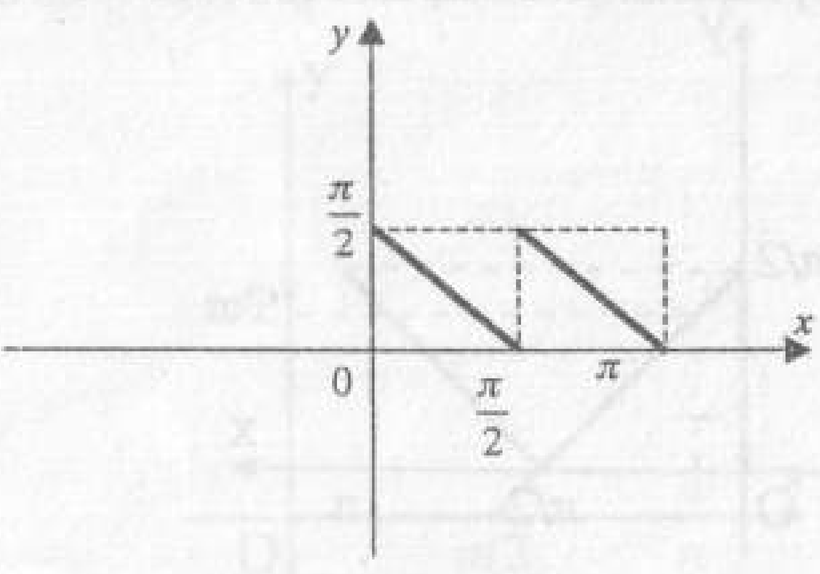
5. Знайти ряд Тейлора в околі точки $x_0=9$ для функції

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}.$$

6. Обчислити з точністю до 0,01 площу фігури, обмеженої лініями

$$y=\frac{e^{-x^2}-1}{x},\quad x=\frac{1}{4},\quad x=\frac{1}{3},\ y=0.$$

7. Розвинути в ряд Фурь'є функцію, графік якої зображений на рисунку, продовжуючи її на $[-\pi;0]$ парним чи непарним способом.



Варіант 24

1. Дослідити збіжність числових рядів:

а) $2+\frac{2^3}{3!}+\frac{2^5}{5!}+\ldots+\frac{2^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+n^2}{n^4}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$.

2. Дослідити ряд на абсолютну й умовну збіжність

$$3-\frac{3^3}{3!}+\frac{3^5}{5!}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{3^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots$$

3. Знайти інтервал збіжності степеневого ряду (з дослідженням границь):

а) $\sum_{n=1}^{\infty}(x-10)^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$.

4. Розвинути в ряд Маклорена функцію

$$f(x)=xe^{5x}$$

5. Знайти ряд Тейлора в околі точки $x_0=2$ для функції

$$f(x)=\frac{1}{x}.$$

6. Обчислити з точністю до 0,01 площу фігури, обмеженої лініями

$$y=\frac{\cos x-1}{x},\ x=\frac{1}{2},\ x=1,\ y=0.$$

8. Розвинути в ряд Фур'є функцію з періодом T=2π:

$$f(x)=\begin{cases}x+2, \\ якщо\ x\in[-\pi;0], \\ -x, \\ якщо\ x\in(0;\pi).\end{cases}$$

Варіант 25

1. Дослідити збіжність числових рядів:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{2n+1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$; в) $\frac{|\cos 1!|}{1\cdot 2}+\frac{|\cos 2!|}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{|\cos n!|}{n(n+1)}+\ldots$

2. Дослідити ряд на абсолютну й умовну збіжність

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n-1)}+\ldots$$

3. Знайти інтервал збіжності степеневого ряду (з дослідженням границь):

а) $\sum_{n=1}^{\infty}10^{2n}(2x-3)^{2n-1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{n+1}}{2^n(n+1)!}$.

4. Розвинути в ряд Маклорена функцію

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{1-2x}}.$$

5. Знайти ряд Тейлора в околі точки $x_0=e$ для функції

$$f(x)=\ln x.$$

6. Обчислити з точністю до 0,01 площу фігури, обмеженої лініями

$$y=\ln(1+\frac{1}{x}),\quad x=1,\quad x=3,\ y=0.$$

9. Розвинути в ряд Фурь'є функцію з періодом Т=2π:

$$f(x)=\begin{cases}x+3, & \\ \text{якщо } x\in[-\pi;0], & \\ -2x, & \\ \text{якщо } x\in(0;\pi).\end{cases}$$

Варіант 26

1. Дослідити збіжність числових рядів:

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin n|}{2^n};\qquad \text{б)}\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n};\qquad \text{в)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

2. Дослідити ряд на абсолютну й умовну збіжність

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)^2}.$$

3. Знайти інтервал збіжності степеневого ряду (з дослідженням границь):

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{n+1}x^{2n}}{(2n-1)^3};\qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{5^n(n+1)}.$$

4. Розвинути в ряд Маклорена функцію

$$f(x)=\ln\frac{x+1}{x+4}.$$

5. Знайти ряд Тейлора в околі точки $x_0=6$ для функції

$$f(x)=\frac{1}{x-5}.$$

6. Обчислити з точністю до 0,01 площу фігури, обмеженої лініями

$$y=\frac{e^{-x^2}}{x},\quad x=\frac{1}{3},\quad x=\frac{1}{2},\ y=0.$$

7. Розвинути в ряд Фур'є функцію з періодом T=2π:

$$f(x)=\begin{cases}-x, & \text{якщо}\ x\in[-\pi;0],\\ x+1, & \text{якщо}\ x\in(0;\pi).\end{cases}$$

Варіант 27

1. Дослідити збіжність числових рядів:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi(2n+1)}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \sin^2 \frac{\pi n}{4}.$$

2. Дослідити ряд на абсолютну й умовну збіжність

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \pi n \alpha}{n^3}.$$

3. Знайти інтервал збіжності степеневого ряду (з дослідженням границь):

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^3} \cdot x^n; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{3^{n+1} \cdot n}.$$

4. Розвинути в ряд Маклорена функцію

$$f(x) = \frac{x}{1-x}.$$

5. Знайти ряд Тейлора в околі точки $x_0 = \frac{\pi}{6}$ для функції

$$f(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right).$$

6. Обчислити з точністю до 0,01 площу фігури, обмеженої лініями

$$y = \ln(1-x), \quad x = 0, \quad x = \frac{1}{3}, \; y = 0$$

7. Розвинути в ряд Фур'є функцію з періодом T=2π:

$$f(x) = \begin{cases} -x, \\ \text{якщо } x \in [-\pi; 0], \\ x+3, \\ \text{якщо } x \in (0; \pi). \end{cases}$$

Варіант 28

1. Дослідити збіжність числових рядів:

$$а)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n;\quad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n}{3^{2n}};\quad в)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{|\sin n|}.$$

2. Дослідити ряд на абсолютну й умовну збіжність

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{e^n}{n!}.$$

3. Знайти інтервал збіжності степеневого ряду (з дослідженням границь):

$$а)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(5n-1)^2}\cdot x^{2n-1};\quad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}2^n\cdot x^n.$$

4. Розвинути в ряд Маклорена функцію

$$f(x)=\frac{\sin x}{x^{-2}}.$$

5. Знайти ряд Тейлора в околі точки $x_0=4$ для функції

$$f(x)=\frac{1}{(x-3)^2}.$$

6. Обчислити з точністю до 0,01 площу фігури, обмеженої лініями

$$y=e^{-x^3},\quad x=0,\quad x=\frac{1}{2},\ y=0$$

7. Розвинути в ряд Фурь'є функцію з періодом Т=2π:

$$f(x)=\begin{cases}x+3,\\ якщо\ \ x\in[-\pi;0],\\ x,\\ якщо\ \ x\in(0;\pi).\end{cases}$$

Варіант 29

1. Дослідити збіжність числових рядів:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(1+n)^2}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^3}.$$

2. Дослідити ряд на абсолютну й умовну збіжність

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{n+1}{n^2+1}\right)^n.$$

3. Знайти інтервал збіжності степеневого ряду (з дослідженням границь):

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+8)^{3n}}{n^4}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}x^n}{(3n-2)^2}.$$

4. Розвинути в ряд Маклорена функцію

$$f(x)=e^{-x^2/4}.$$

5. Знайти ряд Тейлора в околиці крапки $x_0=\sqrt{3}$ для функції

$$f(x)=\sqrt{1+x^2}-x.$$

6. Обчислити з точністю до 0,01 площу фігури, обмеженої лініями

$$y=x\cos x^3,\ x=0,\ x=\frac{1}{2},\ y=0.$$

7. Розвинути в ряд Фурь'є функцію з періодом Т=2π:

$$f(x)=\begin{cases}-2x, \\ \text{якщо } x\in[-\pi;0], \\ x+2, \\ \text{якщо } x\in(0;\pi).\end{cases}$$

Варіант 30

1. Дослідити збіжність числових рядів:

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+3^n};\quad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n+1)};\quad \text{в)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$$

2. Дослідити ряд на абсолютну й умовну збіжність

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n!\cdot\sqrt{2n+1}}.$$

3. Знайти інтервал збіжності степеневого ряду (з дослідженням границь):

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{(n+2)^3}\cdot(x-1)^n;\qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}x^{2n-1}}{(5n-4)^2}.$$

4. Розвинути в ряд Маклорена функцію

$$f(x)=\frac{1}{(1-2x)^3}.$$

5. Знайти ряд Тейлора в околі точки $x_0=1$ для функції

$$f(x)=tg\frac{\pi\cdot x}{4}-x.$$

6. Обчислити з точністю до 0,01 площу фігури, обмеженої лініями

$$y=\sqrt[3]{1+x^4},\ \ x=0,\ \ x=\frac{1}{4},\ y=0.$$

7. Розвинути в ряд Фурь'є функцію з періодом T=2π:

$$f(x)=\begin{cases}-3x, & якщо\ \ x\in[-\pi;0],\\ x, & якщо\ \ x\in(0;\pi).\end{cases}$$

Приклад розв'язання індивідуального завдання

1. Дослідити збіжність числових рядів:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+3^n}$.

<u>Розв'язання:</u> Необхідна умова збіжності ряду $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n+3^n} = 0$ виконується. Загальний член ряду $a_n = \frac{1}{2^n+3^n}$ містить вираз вигляду a^n, тому для дослідження ряду на збіжність доцільно скористатися ознакою Даламбера.

Ознака Даламбера. Нехай існує ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Якщо існує $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$, тоді ряд збігається при $\rho < 1$ і розбігається при $\rho > 1$. Коли $\rho = 1$, тоді нічого про збіжність ряду сказати неможливо, треба користуватися іншою ознакою.

Одержимо $(n+1)$-ий член ряду, замінивши n на $(n+1)$ в формулі загального члена: $a_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}+3^{n+1}}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{n+1}+3^{n+1}} : \frac{1}{2^n+3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n+3^n}{2^{n+1}+3^{n+1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3^n\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n+1\right)}{3^{n+1}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}+1\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n+1\right)}{3\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}+1\right)} = \frac{1}{3} < 1.$$

Відповідно до ознаки Даламбера вихідний ряд збігається.

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$.

<u>Розв'язання:</u> Необхідна умова збіжності ряду виконується:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{9n^2+3n-6n-2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{9n^2-3n-2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{9(n^2-\frac{3}{9}n-\frac{2}{9})} = \frac{1}{9}\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2-\frac{1}{3}n-\frac{2}{9}} = 0.$$

Розглянемо вираз $1/n^2$. Скористаємося другою ознакою порівняння для дослідження ряду на збіжність.

Друга ознака порівняння. Якщо існує границя $\lim\limits_{n\to\infty} u_n / v_n = k = const$,

тоді обидва ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ та $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ збігаються чи розбігаються одночасно.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+2)} : \frac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{9(n^2 - n/3 - 2/9)} : \frac{1}{n^2} =$$

$$= \frac{1}{9} \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2 - n/3 - 2/9} = \frac{1}{9} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 - 1/3n - 2/9n^2} = \frac{1}{9}.$$

На замітку! Узагальнений гармонічний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ збігається, якщо $\alpha > 1$, та розбігається, якщо $\alpha \le 1$.

В нашому випадку ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ – збіжний ($\alpha = 2 > 1$), отже, вихідний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$ також збігається.

в) $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + ... + \frac{n}{n+1}$.

Розв'язання. Загальний член ряду $a_n = \frac{n}{n+1}$. Перевіримо необхідну умову збіжності ряду: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \ne 0$. Необхідна умова збіжності ряду не виконується. Отже, ряд розбігається.

2. Дослідити ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n^2+n+1)^n}$ на збіжність.

Розв'язання. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n^2+n+1)^n}$ є знакопочережним.

Розглянемо ряд, складений з абсолютних величин $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2+n+1)^n}$.

Скористаємося радикальною ознакою Коші.

Ознака Коші. Нехай існує ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Якщо існує $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$, тоді ряд збігається при $\rho < 1$ і розбігається при $\rho > 1$. Коли $\rho = 1$, тоді нічого про збіжність ряду сказати неможливо, треба користуватися іншою ознакою: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{1}{(n^2+n+1)^n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2+n+1} = 0 < 1$.

Якщо ряд, складений з абсолютних величин, збігається, тоді і даний ряд також збігається, причому абсолютно.

3. Знайти інтервал збіжності степеневих рядів: а) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n+1)7^n} \cdot x^n$.

<u>Розв'язання.</u> Радіус збіжності знайдемо за формулою

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|, \text{ де } a_n = \frac{1}{(n+1)7^n}; \quad a_{n+1} = \frac{1}{(n+2)7^{n+1}}.$$

На замітку! Якщо $R \to \infty$, ряд збігається на всій числовій осі, тобто в проміжку $(-\infty;+\infty)$; якщо $R = 0$, ряд збігається в точці $x = 0$.

Розглянемо границю $R = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{(n+1)7^n} \cdot \dfrac{(n+2)7^{n+1}}{1} =$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)7^n \cdot 7}{(n+1)7^n} = 7 \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n+1} = 7 \cdot 1 = 7.$$

Знайдемо інтервал збіжності степеневого ряду:

$|x| < 7 \Rightarrow -7 < x < 7$.

Дослідимо збіжність ряду в граничних точках $x = -7$ та $x = 7$.

При $x = -7$ одержимо числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n+1)7^n} \cdot (-7)^n$ або

$\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n 7^n}{(n+1)7^n} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(n+1)}$. Даний ряд є знакопочережним і за ознакою Лейбніца цей ряд збігається.

При $x = 7$ одержимо числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{(n+1)\,7^n}$ або $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)}$.

За інтегральною ознакою цей ряд розбігається (невластивий інтеграл $\int\limits_1^{\infty} \frac{dn}{n+1} = \lim\limits_{A\to\infty} \int\limits_1^{A} \frac{dn}{n+1} = \lim\limits_{A\to\infty} \ln(n+1)\Big|_1^A = \infty$). Таким чином, область збіжності ряду є проміжок $[-7;7)$, тобто значення x, які задовольняють нерівностям $-7 \leq x < 7$.

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{(n+2)^3} \cdot (x-1)^n$.

Розв'язання. Знайдемо радіус збіжності степеневого ряду

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{(n+2)^3} \cdot (x-1)^n$. $a_n = \frac{n+1}{(n+2)^3}$, $a_{n+1} = \frac{n+2}{(n+3)^3}$. Для цього розглянемо границю

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{(n+2)^3} \cdot \frac{(n+3)^3}{n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+2} \cdot \left(\frac{n+3}{n+2}\right)^3 = 1$$

Знайдемо інтервал збіжності степеневого ряду.

$$|x-1| < 1 \;\Rightarrow\; -1 < x-1 < 1 \;\Rightarrow\; 0 < x < 2.$$

Дослідимо збіжність ряду в граничних точках $x = 0$ і $x = 2$.

При $x = 0$ одержуємо числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{(n+2)^3}$. За ознакою Лейбніца цей ряд збігається.

При $x = 2$ одержуємо числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{(n+2)^3}$. Порівняємо його з числовим рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, який збігається (див. приклад 1,б). Скористаємося другою ознакою порівняння: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{(n+2)^3} : \frac{1}{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)\cdot n^2}{(n+2)^3} =$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^3 + n^2}{n^3 + 3n^2 \cdot 2 + 3n \cdot 4 + 8} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + 1/n}{1 + \frac{6}{n} + \frac{12}{n^2} + \frac{8}{n^3}} = 1.$$

Оскільки ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ збігається, тоді ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{(n+2)^3}$ збігається за другою ознакою порівняння. Таким чином, інтервал збіжності степеневого ряду $x\in[0;2]$.

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}x^{2n-1}}{(5n-4)^2}$.

<u>Розв'язання.</u> Для знаходження інтервалу збіжності степеневого ряду скористаємось узагальненою ознакою Даламбера.

Узагальнена ознака Даламбера. Нехай існує ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$, тоді інтервал збіжності знайдемо із нерівності $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}<1$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n\left|x^{2(n+1)-1}\right|}{(5(n+1)-4)^2}:\frac{3^{n-1}\left|x^{2n-1}\right|}{(5n-4)^2}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{3^{n-1}}\cdot\frac{(5n-4)^2}{(5n+1)^2}\cdot\left|\frac{x^{2n+1}}{x^{2n-1}}\right|=3\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-\frac{4}{5n}}{1+\frac{1}{5n}}\right)^2\cdot x^2=3x^2<1,$$

то $x^2<1/3 \ \Rightarrow\ -1/\sqrt{3}<x<1/\sqrt{3}$. Перевіримо границі інтервалу збіжності.

При $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$ одержимо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}}{(5n-4)^2}\cdot\frac{1}{(\sqrt{3})^{2n-1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{3}\cdot(5n-4)^2}$.

Дослідимо ряд на збіжність. Необхідна умова збіжності ряду виконується ($\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{3}(5n-4)^2}=0$).

Дослідимо ряд на збіжність за інтегральною ознакою Коші.

Інтегральна ознака Коші. Якщо f(x), $x\geq 1$ - неперервна, додатна, монотонно спадна функція, тоді ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$, де $u_n=f(n)$, збігається чи розбігається тоді, коли збігається чи розбігається інтеграл $\int_1^{\infty}f(x)dx$.

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3}\cdot(5x-4)^2}\,dx = \lim_{A\to\infty} \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{5}\cdot\left(-\frac{1}{5x-4}\right)\Bigg|_1^A =$$
$$= -\frac{1}{5\sqrt{3}}\cdot\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{5A-4}-1\right) = \frac{1}{5\sqrt{3}}.$$

Відповідно до інтегральної ознаки Коші вихідний ряд збігається.

При $x = -1/\sqrt{3}$ одержимо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{(5n-4)^2}\cdot\frac{1}{(-\sqrt{3})^{2n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n-1}}{\sqrt{3}\cdot(5n-4)^2} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{3}\cdot(5n-4)^2}.$$

Порівняємо його із збіжним рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ (див. приклад 1,б).

Члени ряду $-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{3}\cdot(5n-4)^2}$ менше за членів ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, тому за першою ознакою порівняння цей ряд збігається тим більше. Отже, інтервал збіжності даного степеневого ряду $x \in \left[-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}\right]$

4. Розвинути в ряд Маклорена функцію $f(x) = 1/(1-2x)^3$.

Розв'язання. Дана функція диференцьована нескінченне число раз. Застосуємо розвинення функції в біноміальний ряд:

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \ldots +$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)\ldots[m-(n-1)]}{n!}x^n + \ldots \quad, |x| < 1.$$

У нашому прикладі $f(\mathrm{x}) = (1-2\mathrm{x})^{-3}$.

$$f(x) = (1-2x)^{-3} = 1 - 3\cdot(-2x) + \frac{-3\cdot(-4)}{2!}(-2x)^2 +$$
$$+\frac{-3\cdot(-4)\cdot(-5)}{3!}(-2x)^3 + \ldots +$$
$$+\frac{-3\cdot(-4)\cdot(-5)\cdot\ldots\cdot(-3-n+1)}{n!}(-2x)^n + \ldots =$$
$$= 1 + 6x + 24x^2 + 80x^3 + \ldots \quad, |x| < \frac{1}{2}.$$

5. Розвинути в ряд Тейлора функцію $f(x) = tg(\pi \cdot x/4) - x$ в околі точки $x = 1$.

<u>Розв'язання.</u> Для функції $f(x)$, що має усі похідні до $(n+1)$ - го порядку включно, в околі точки $x = a$ вірен ряд Тейлора:

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{1 \cdot 2} f''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \ldots$$

$$f(x) = tg\frac{\pi \cdot x}{4} - x, \qquad f(1) = tg\frac{\pi}{4} - 1 = 0,$$

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi \cdot x}{4}} \cdot \frac{\pi}{4} - 1, \qquad f'(1) = \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{4}} \cdot \frac{\pi}{4} - 1 = \frac{\pi}{2} - 1,$$

$$f''(x) = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\pi}{2} \frac{\sin\frac{\pi x}{4}}{\cos^3 \frac{\pi \cdot x}{4}}, \qquad f''(1) = \frac{\pi^2}{8} \cdot \frac{tg\frac{\pi}{4}}{\cos^2 \frac{\pi}{4}} = \frac{\pi^2}{4},$$

$$f'''(x) = \frac{\pi^2}{8}\left(\left(tg\frac{\pi x}{4}\right)' \cdot \cos^{-2}\frac{\pi \cdot x}{4} + tg\frac{\pi x}{4} \cdot \left(\cos^{-2}\frac{\pi \cdot x}{4}\right)'\right) =$$

$$= \frac{\pi^2}{8}\left(\frac{\pi}{4}\cos^{-4}\frac{\pi \cdot x}{4} + tg\frac{\pi x}{4}(-2)\cos^{-3}\frac{\pi \cdot x}{4}\left(-\sin\frac{\pi x}{4}\right) \cdot \frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= \frac{\pi^3\left(1 + 2\sin^2\frac{\pi x}{4}\right)}{32}\cos^{-4}\frac{\pi \cdot x}{4}, \qquad f'''(1) = \frac{\pi^3}{32}\left(1 + 2\sin^2\frac{\pi}{4}\right)\cos^{-4}\frac{\pi}{4} = \frac{\pi^3}{4}.$$

Таким чином: $tg\frac{\pi \cdot x}{4} - x = \frac{x-1}{1} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) - \frac{(x-1)^2}{1 \cdot 2} \frac{\pi^2}{4} + \frac{(x-1)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{\pi^3}{4} + \ldots =$

$$= (\pi/2 - 1) \cdot (x-1) + (\pi^2/8) \cdot (x-1)^2 + (\pi^3/24) \cdot (x-1)^3 + \ldots$$

6. Обчислити площу фігури, яка обмежена лініями

$y = \sqrt[3]{1 + x^4}$, $x = 0$, $x = 1/4$, $y = 0$ з точністю 10^{-2}.

<u>Розв'язання.</u> Обчислимо площу фігури за допомогою визначеного інтеграла:

$S = \int\limits_a^b f(x)dx$, $S = \int\limits_0^{1/4} \sqrt[3]{1 + x^4}\, dx$. Розвинемо підінтегральну функцію в ряд Маклорена згідно з формулою (1)

$$(1 + x^4)^{1/3} = 1 + \frac{1}{3} \cdot x^4 + \frac{1/3 \cdot (1/3 - 1)}{2!} \cdot x^8 + \ldots$$

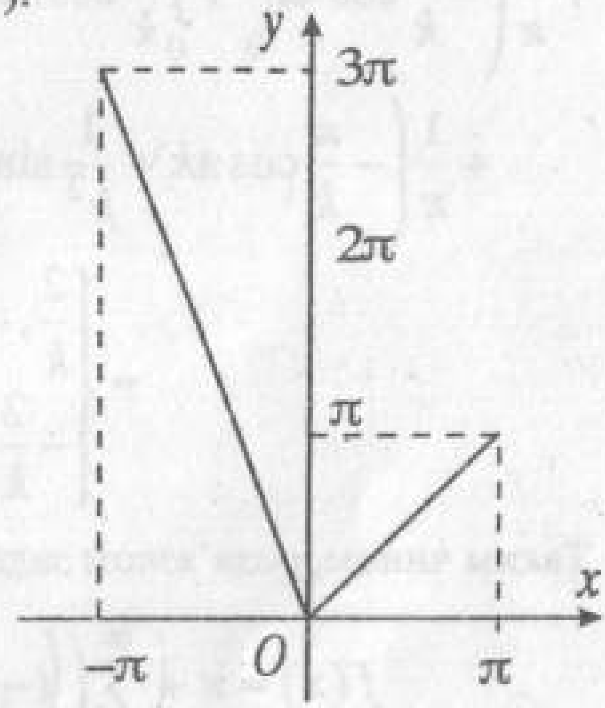
$$S=\int_0^{\frac{1}{4}}\sqrt[3]{1+x^4}\,dx=\int_0^{\frac{1}{4}}(1+\frac{1}{3}\cdot x^4+\frac{\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}\cdot x^8+\ldots)\,dx=$$

$$=(x+\frac{1}{3}\cdot\frac{x^5}{5}-\frac{1}{9}\cdot\frac{x^9}{9}+\ldots)\Big|_0^{\frac{1}{4}}=\frac{1}{4}+\frac{1}{15}\cdot\frac{1}{4^5}-\frac{1}{81}\cdot\frac{1}{4^9}+\ldots\approx 0{,}25.$$

7. Розвинути в ряд Фур'є функцію з періодом $T=2\pi$:

$$f(x)=\begin{cases}-3x, & якщо\ x\in[-\pi;0],\\ x, & якщо\ x\in(0;\pi).\end{cases}$$

<u>Розв'язання.</u> Побудуємо функцію $f(x)$ (рисунок).
Розвинемо функцію $f(x)$ у ряд Фур'є.



$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx),$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx,$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx dx,$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx dx.$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx dx=\frac{1}{\pi}(\int_{-\pi}^{0}-3x\cos kx dx+\int_0^{\pi}x\cos kx dx)=$$

$$=\left\{\begin{matrix}x=u, & dx=du,\\ \cos kx dx=dv, & v=\frac{1}{k}\sin kx\end{matrix}\right\}=\frac{-3}{\pi}\left(\frac{x}{k}\sin kx\Big|_{-\pi}^{0}-\int_{-\pi}^{0}\frac{1}{k}\sin kx dx\right)+$$

$$+\frac{1}{\pi}\left(\frac{x}{k}\sin kx\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\frac{1}{k}\sin kx dx\right)=\frac{-3}{\pi}\left(\frac{\pi}{k}\sin(-\pi k)+\frac{1}{k^2}\cos kx\Big|_{-\pi}^{0}\right)+$$

$$+\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{k}\sin\pi k+\frac{1}{k^2}\cos kx\Big|_0^{\pi}\right)=\frac{-3}{\pi k^2}\left(1-(-1)^k\right)+\frac{1}{\pi k^2}\left((-1)^k-1\right)=$$

$$=\left((-1)^k-1\right)\frac{4}{\pi k^2}=\begin{cases}0, & при \quad k \quad парному,\\ \dfrac{-8}{\pi k^2}, & при\ k \quad непарному.\end{cases}$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx dx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}-3x\sin kx dx+\int_{0}^{\pi}x\sin kx dx\right)=$$

$$=\begin{Bmatrix}x=u, \quad dx=du,\\ \sin kx dx=dv, v=-\dfrac{1}{k}\cos kx\end{Bmatrix}=\frac{-3}{\pi}\left(-\frac{x}{k}\cos kx\Big|_{-\pi}^{0}+\int_{-\pi}^{0}\frac{1}{k}\cos kx dx\right)+$$

$$+\frac{1}{\pi}\left(-\frac{x}{k}\cos kx\Big|_{0}^{\pi}+\int_{0}^{\pi}\frac{1}{k}\cos kx dx\right)=\frac{-3}{\pi}\left(-\frac{\pi}{k}\cos(-\pi k)+\frac{1}{k^2}\sin kx\Big|_{-\pi}^{0}\right)+$$

$$+\frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{k}\cos\pi k+\frac{1}{k^2}\sin kx\Big|_{0}^{\pi}\right)=\frac{3}{k}(-1)^k-\frac{1}{k}(-1)^k=(-1)^k\frac{2}{k}=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{2}{k}, & при\ k\ парному,\\ -\dfrac{2}{k}, & при\ k\ непарному.\end{cases}$$

Таким чином, розв'язком задачі є функція

$$f(x)=\pi+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\left((-1)^k-1\right)\frac{4}{\pi\cdot k^2}\cos kx+(-1)^k\frac{2}{k}\sin kx\right)=$$

$$=\pi-\frac{8}{\pi}\cos x-2\sin x+\sin 2x-\frac{8}{9\pi}\cos 3x-\frac{2}{3}\sin 3x+\dots$$

Список рекомендованої літератури

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальное и интегральное исчисления. – М.: Наука, 1988.
2. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевников Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2т. – М.: Высшая школа, 1986. – Т.2.
3. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. В 2т. – М.: Наука, 1985. – Т.2.
4. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике. – М.: Наука, 1987.

Упорядники:

Бондаренко Зоя Іванівна
Подольська Світлана Миколаївна
Тимченко Світлана Євгенівна
Удовицька Дина Володимирівна

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ТА ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

ДО РОЗДІЛУ "РЯДИ" дисципліни "Вища математика"

для студентів напрямку 0902 Інженерна механіка

Редакційно-видавничий комплекс
Редактор Ю.В.Рачковська

Підписано до друку 03.07.03. Формат 30x42/4.
Папір Captain. Ризографія. Умовн.друк.арк. 2,4.
Обліково-видавн. арк. 2,4. Тираж 100 прим. Зам. №284.

НГУ
49027, м.Дніпропетровськ-27, просп. К.Маркса, 19.